فصل ۳

توابع ستاره‌گون یکنواخت و محدب یکنواخت

هدف اصلی رساله در این بخش ظاهر می شود و در اینجا ما رده های توابع ستاره‌گون یکنواخت و محدب یکنواخت را تعریف و مشخصه سازی می کنیم. هر دو رده با استفاده از یکپارچه سازی روی رده های توابع تحلیلی ستارهٔگون یکنواخت (به ترتیب محدب یکنواخت) و توابع همساز کاملاً ستارهٔگون (به ترتیب کاملاً محدب) اعمال شده و در برگیرنده ی خواص خانواده‌های پیشین است. مطالعه ی نخستین رده‌ها از توابع تحلیلی توسط گودمن انجام شده و رده‌های توابع همساز که توسط کلونی و شیل_اسمال صورت گرفته ما را به این تعمیم راهنمائی کرد. برخلاف رده‌های ستارهٔگون یکنواخت و کاملاً ستارهٔگون، روی خانواده های محدب مطالعات بیشتری انجام شده و این به رساندن ما به مقصودمان کمک شایانی می کند. در این زمینه اخیراً مطالعات بیشتری صورت گرفته و ما در این فصل آنها را ذکر خواهیم نمود. بعلاوه هم در توابع تحلیلی و هم در توابع همساز، وجود ویژگی پیچش نه تنها از خواص عملکردی دو تابع است بلکه ابزاری قوی در تعمیم مسئله به حالات کلی تر، و استنتاج نتایجی است که در وضعیت قبلی قابل حصول نبوده اند. برای نیل به این مهم، جهت بهره گیری از ابزار پیچش تعاریف و قضایای مورد نیاز را در ادامه بیان خواهیم نمود.

برای تابع همساز $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in\mathcal{S}_H$ عملگر $\mathbf{D}_\zeta f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ با تعریف

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\zeta f(z) &= (z-\zeta)f_z(z)-\overline{(z-\zeta)}f_{\overline{z}}(z)\\ &= (z-\zeta)h'(z)-\overline{(z-\zeta)g'(z)}\end{aligned} \tag{۱.۳}$$

عملگری همساز است. بازای $\zeta=0$ عملگر $\mathbf{D}_0 f(z)=zf_z-\overline{z}f_{\overline{z}}=zh'-\overline{zg'}=Df(z)$ همان عملگر پیشین (۱۰.۲) بوده و مشتقگیری از عملگر $\mathbf{D}_\zeta f(z)$ نتیجه می دهد که

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\zeta^2 f(z) &= \mathbf{D}_\zeta(\mathbf{D}_\zeta f(z))\\ &= \mathbf{D}_\zeta((z-\zeta)h'(z)-\overline{(z-\zeta)g'(z)})\\ &= (z-\zeta)^2h''(z)+\overline{(z-\zeta)^2g''(z)}+(z-\zeta)h'(z)+\overline{(z-\zeta)g'(z)}\end{aligned} \tag{۲.۳}$$

بازای $\zeta=0$ عملگر $\mathbf{D}_0^2 f(z)=z^2h''(z)+\overline{z^2g''(z)}+zh'(z)+\overline{zg'(z)}=D^2f(z)$ توسط الامیری[۱] و موکانو تشریح شد [۷]. با بکارگیری این نماد، از عملیات نگارش مختصری کاسته شده و معانی فرمول ها واضح تر خواهد بود. در اینجا لازم است ذکر شود که همزمان با کار مولفان در بحث تعمیم توابع کاملا ستاره‌گون، مقاله ای نیز در این باب توسط پوناسمی[۲]، پاراجاپات[۳] و سایرام کالیراج[۴] ارائه شد که حاوی همین ایده هاست [۷۹]. اگرچه تعاریف و نتایج در هر دو مورد مشابه و بحث شکل یکسانی دارد، لیکن اثبات ارائه شده در اینجا با روش پیچش می باشد که به نوبه خود حاوی نوآوری بوده و تاییدی بر کار آنهاست. در این نوشتار سعی شده تا از نمادهای مشترک بهره گرفته و نتایج را در هر دو شکل بیان کنیم.

۱.۳ توابع ستاره‌گون یکنواخت

شبیه تعریف ۱.۱۱.۱ برای توابع تحلیلی، می توان برای توابع همساز چنین تعریف کرد:

تعریف ۱.۱.۳. [۷۹] تابع همساز موضعا تک ارز $f=h+\overline{g}\in\mathcal{H}$ را نگاشت ستاره‌گون یکنواخت[۵] در $\mathbb{D}$ گوئیم اگر f در $\mathbb{D}$ کاملاً ستاره‌گون بوده و هر قوس مدور γ_ζ در $\mathbb{D}$ با مرکز $\zeta\in\mathbb{D}$ را به قوس $f(\gamma_\zeta)$ بنگارد که نسبت به $f(\zeta)$ ستاره‌گون است.

اکنون شرطی لازم را برای آنکه تابع تک ارز $f\in\mathcal{S}_H$ که در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت باشد را بیان می کنیم. برای هر قوس مدور

$$\gamma_\zeta:=\{z=\zeta+re^{i\theta}\ ,\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$$

[۱] Al-Amiri
[۲] Ponnusamy
[۳] Prajapat
[۴] Sairam Kaliraj
[۵] Uniformly starlike

که در $\mathbb{D}$ واقع شده و مرکز آن $\zeta \in \mathbb{D}$ است، گیریم Γ_ζ تصویر γ_ζ تحت f باشد. قوس Γ_ζ را نسبت به $f(\zeta)$ ستاره‌گون گوئیم اگر شناسه بردار $f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta)$ تابعی غیرنزولی از θ باشد، یعنی

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta)\} \geqslant 0 \quad , \quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta \tag{۳.۳}$$

و یا

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(z) - f(\zeta)\} \geqslant 0$$

و این درست است اگر و فقط اگر

$$\mathbf{Im}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(z)}{f(z) - f(\zeta)} \geqslant 0$$

برای $z \in \gamma_\zeta$. قرار می دهیم $z = \zeta + re^{i\theta}$ بنابراین $\frac{\partial}{\partial\theta}z = i(z - \zeta)$ و یک محاسبه ساده نتیجه می دهد

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{(z-\zeta)f_z(z) - \overline{(z-\zeta)}f_{\bar{z}}(z)}{f(z) - f(\zeta)}\right\} \geqslant 0 \quad , \quad (z,\zeta) \in \mathbb{D}^2 \quad (z \neq \zeta) \tag{۴.۳}$$

به طور معادل

$$\mathbf{Re}\,\frac{\mathbf{D}_\zeta f(z)}{f(z) - f(\zeta)} \geqslant 0 \, , \quad (z,\zeta) \in \mathbb{D}^2 \tag{۵.۳}$$

رده ی تمام توابع $f \in \mathcal{S}_H$ (به ترتیب $f \in \mathcal{S}_H^\circ$) که در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت هستند را با $\mathcal{US}_H^*$ (به ترتیب $\mathcal{US}_H^{\circ *}$) نشان می دهیم. واضح است که $\mathcal{US}_H^* \subset \mathcal{FS}_H^*$.

نتیجه ۱.۱.۳. [۶۹] اگر $f \in \mathcal{UST}$ تابعی تحلیلی باشد آنگاه $f \in \mathcal{US}_H^*$. لذا $\mathcal{UST} \subset \mathcal{US}_H^*$ و اگر تابعی در (۱.۱۱.۱) صدق نکند، سپس در $\mathcal{US}_H^*$ نیست. گودمن [۴۱] نشان داد که تابع تحلیلی $\frac{z}{1 - Az} \in \mathcal{UST}$ $f(z) =$ اگر و فقط اگر $|A| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$، در نتیجه برای نگاشت محدب $\ell(z) = \frac{z}{1-z} \notin \mathcal{US}_H^*$.

مثال ۱.۱.۳. بازای $|\beta| < 1$ برای نگاشتهای آفین[۶] $f(z) = z + \overline{\beta z} \in \mathcal{US}_H^*$، زیرا

$$\mathbf{Re}\,\frac{(z-\zeta) - \overline{(z-\zeta)\beta}}{(z-\zeta) + \overline{(z-\zeta)\beta}} \geqslant 0$$

معادل است با

$$\mathbf{Re}\left((z-\zeta) - \overline{(z-\zeta)\beta}\right)\left(\overline{(z-\zeta)} + (z-\zeta)\beta\right) \geqslant 0$$

یا $(1 - |\beta|^2)|z - \zeta|^2 \geqslant 0$.

[۶] Affine mappings

نتیجه ۲.۱.۳. [۶۹] بازای $\zeta = 0$ در (۵.۳)، تابع همساز $f \in \mathcal{US}_H^*$ در $\mathbb{D}$ تک ارز و طبق لم ۲.۶.۲ کاملا ستاره‌گون خواهد بود. پس واضح است که هر تابع همسازی که کاملا ستاره‌گون نباشد در $\mathcal{US}_H^*$ واقع نخواهد شد. تابع همساز $f(z) = \mathbf{Re}\,\frac{z}{(1-z)^2} + i\mathbf{Im}\frac{z}{1-z}$ کاملا ستاره‌گون نیست [۳۰] پس $f \notin \mathcal{US}_H^*$.

بسادگی دیده می شود که این رده $\mathcal{US}_H^*$ تحت چرخش، $e^{-i\alpha}f(e^{i\alpha}z)$ بازای α حقیقی حفظ می شود. خاصیت دیگر حفظ رده تحت انتقال[۷] $\frac{1}{t}f(tz)$، $0 < t \leqslant 1$ است. $\mathcal{US}_H^* \subset \mathcal{FS}_H^* \subset \mathcal{S}_H^*$.
اکنون شرطی کافی را برای آنکه تابع $f \in \mathcal{H}$ در $\mathbb{D}$ تک ارز و ستاره‌گون یکنواخت باشد را ذکر می نمائیم. نابرابری های (۳.۳) و (۴.۳) تنها وقتی بامعنی اند که f در $\mathbb{D}$ تک ارز باشند. بنابراین نگاشت همساز $f \in \mathcal{S}_H$ در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت است اگر و فقط اگر (۴.۳) برقرار باشد. از طرف دیگر یافتن شرط کافی برای جهت نگهدار بودن تابع همساز $f \in \mathcal{H}$ که در رده ی $\mathcal{US}_H^*$ قرار گیرد مهم است.

قضیه ۱.۱.۳. [۷۹] گیریم $f \in \mathcal{H}$ چنان باشد که

(الف) $f(0) = 0$ و برای تمام $z \in \mathbb{D}$ ها $J_f(z) > 0$،

(ب) $\mathbf{Re}\left\{\frac{(z-\zeta)f_z(z) - \overline{(z-\zeta)}f_{\bar{z}}(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right\} \geqslant 0$ بازای $(z,\zeta) \in \mathbb{D}^2$ که $(z \neq \zeta)$ و نابرابری اکید وقتی برقرار است که $\zeta = 0$.

آنگاه $f \in \mathcal{US}_H^*$.

برهان. با فرض $f \in \mathcal{H}$ در شرط های (الف) و (ب) صدق نماید. برای $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ و $\zeta = 0$، شرط (ب) شکل زیر را بخود می گیرد

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{f(z)}{zf_z(z) - \bar{z}f_{\bar{z}}(z)}\right\} > 0 \quad , \quad z \in \mathbb{D} - \{0\}$$

از ([۶۴]، قضیه ۱) می دانیم که f در $\mathbb{D}$ تک ارز بوده و از آنجا $f(z) - f(\zeta) \neq 0$ برای $z \neq \zeta$.
بدین ترتیب (ب) را می توان چنین بازنویسی کرد:

$$\mathbf{Re}\left\{\frac{(z-\zeta)f_z(z) - \overline{(z-\zeta)}f_{\bar{z}}(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right\} \geqslant 0 \quad , \quad (z,\zeta) \in \mathbb{D}^2 \quad (z \neq \zeta)$$

که شرطی لازم برای $f \in \mathcal{H}$ است که در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت باشد. □

در ذیل شرطی لازم و کافی برای آنکه $f \in \mathcal{US}_H^*$ باشد را ارائه می دهیم. این شرط تعمیم شکلی از قضیه ای درباره توابع کاملاً ستاره‌گون است که توسط چوکه[۸]، دورن[۹] و آسگود[۱۰] مطرح شده است ([۲۴] ص۱۳۹).

---
[۷] Transformation
[۸] Chuaqui
[۹] Duren
[۱۰] Osgood

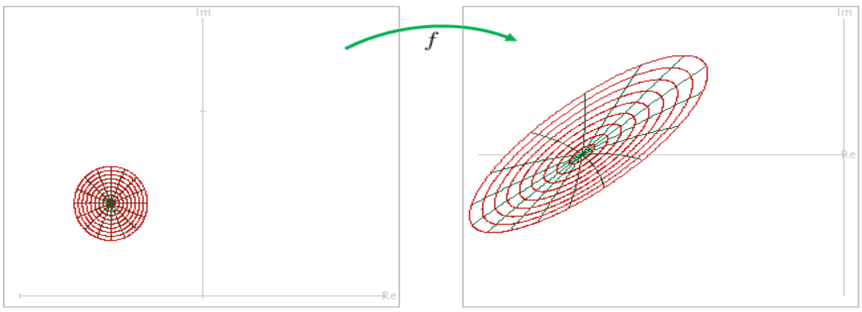
قضیه ۲.۱.۳. [۶۹] گیریم $f(z)\in\mathcal{S}_H$. $f\in\mathcal{US}^*_H$ اگر و فقط اگر

$$|h(z)-h(\zeta)|^2\,\mathbf{Re}\,Q_h \geqslant |g(z)-g(\zeta)|^2\,\mathbf{Re}\,Q_g+\mathbf{Re}\left\{(h(z)-h(\zeta))(g(z)-g(\zeta))(Q_g-Q_h)\right\} \qquad (۶.۳)$$

که $Q_h=\frac{(z-\zeta)h'(z)}{h(z)-h(\zeta)}$ و $Q_g=\frac{(z-\zeta)g'(z)}{g(z)-g(\zeta)}$ بازای (z,ζ) در $\mathbb{D}^2$.

برهان. مطابق تعریف $f\in\mathcal{US}^*_H$ اگر وفقط اگر $\mathbf{Re}\,\frac{\mathbf{D}_\zeta f(z)}{f(z)-f(\zeta)}>0$ که $(z,\zeta)\in\mathbb{D}^2$، و این اگر و فقط اگر $\mathbf{Re}\,(\mathbf{D}_\zeta f(z))(\overline{f(z)}-\overline{f(\zeta)})>0$ برای $(z,\zeta)\in\mathbb{D}^2$، بدین ترتیب محاسبه ساده ای ما را به (۶.۳) می رساند. □

مثال ۲.۱.۳. اگر $h\in\mathcal{UST}$ و $g=\beta h$ با شرط $|\beta|<1$ باشند، سپس $f=h+\overline{g}\in\mathcal{US}^*_H$ زیرا در این حالت h و g در $Q_h=Q_g$ صادق بوده و (۶.۳) برقرار است. به موجب این می توان گفت که $f(z)=z+Az^2+\overline{\beta z+\beta Az^2}\in\mathcal{US}^*_H$ که $|\beta|<1$ و $|A|<\frac{\sqrt{2}}{2}$. در این مثال با فرض $A=\frac{1}{2}$، $\beta=-\frac{i}{2}$ بنابراین $f=z+\frac{1}{2}z^2\overline{-\frac{i}{2}z-\frac{i}{4}z^2}\in\mathcal{US}^*_H$. شکل ۱.۳ یک دایره $|z+\frac{1-i}{2}|<\frac{1}{5}$ را نشان می دهد که تحت این نگاشت به ناحیه ای بیضوی ستاره‌گون بمرکز $f(\zeta)=(-0/37,0)$ نگاشته می شود.



شکل ۱.۳: تصویر $|z+\frac{1-i}{2}|<\frac{1}{5}$ تحت $f=z+\frac{1}{2}z^2\overline{-\frac{i}{2}z-\frac{i}{4}z^2}\in\mathcal{US}^*_H$.

نتیجه ۳.۱.۳. [۶۹] بازای $\zeta\in\mathbb{D}$ ثابتی می توان مثلا گرفت $z=0$ در (۵.۳) پس تابع همساز $f\in\mathcal{US}^*_H$ در $\mathbf{Re}\,\frac{\zeta-\overline{\zeta}b_1}{f(\zeta)}>0$ صدق می کند. بعلاوه اگر $f\in\mathcal{US}^{\circ *}_H$ پس $\mathbf{Re}\,\frac{f(z)}{z}>0$ در $\mathbb{D}$.

مثال ۳.۱.۳. برای بررسی تابع همساز

$$f(z)=\mathbf{Re}\,\frac{z}{1-z}+i\,\mathbf{Im}\,\frac{z}{(1-z)^2}$$

داریم

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}-\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)^2}\in\mathcal{S}_H^{\circ}\\
h'(z) &= \frac{1}{(1-z)^3}\\
g'(z) &= \frac{-z}{(1-z)^3}\\
Df(z) &= \frac{z}{(1-z)^3}+\overline{\frac{z^2}{(1-z)^3}}\\
\mathbf{Re}\,\frac{Df(z)}{f(z)} &= \mathbf{Re}\,\frac{\frac{z}{(1-z)^3}+\overline{\frac{z^2}{(1-z)^3}}}{\frac{z-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}-\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)^2}}>0\\
\mathbf{Re}\,\frac{D_{0/2}f(z)}{f(z)-f(0/2)} &= \mathbf{Re}\,\frac{\frac{(z-0/2)}{(1-z)^3}+\overline{\frac{z(z-0/2)}{(1-z)^3}}}{\frac{z-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}-\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)^2}-\frac{0/2-\frac{1}{2}0/2^2}{(1-0/2)^2}-\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{0/2}{1-0/2}\right)^2}}\not>0
\end{aligned}
$$

که نشان می دهد $f\in\mathcal{FS}_H^*$ اما $f\notin\mathcal{US}_H^*$.

مثال ۴.۱.۳. جهت بررسی تابع $f(z)=z+\frac{1}{4}\overline{z}^4\in\mathcal{S}_H^*$ چون $Df(z)=z-\overline{z}^4$،

$$\mathbf{Re}\,\frac{Df(z)}{f(z)}=\mathbf{Re}\,\frac{z-\overline{z}^4}{z+\frac{1}{4}\overline{z}^4}>0$$

و

$$\mathbf{Re}\,\frac{\mathbf{D}_{\zeta}f(z)}{f(z)-f(\zeta)}=\mathbf{Re}\,\frac{z-\zeta-\overline{z}^4+\overline{z}^3\zeta}{z+\frac{1}{4}\overline{z}^4-\zeta-\frac{1}{4}\overline{\zeta}^4}$$

در $(z,\zeta)=(0/2,-0/3)$ و در نتیجه $f\in\mathcal{FS}_H^*$ اما $f\notin\mathcal{US}_H^*$.

از محاسبات روی این رده حدس میزنیم که می بایست $\mathbf{Re}\,\frac{f(z)}{z}\geqslant\frac{1}{2}$.

قضیه ۳.۱.۳. [۷۹] با فرض اینکه $f=h+\overline{g}$ بشکل (۴.۲) بوده و در شرط

$$\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|\leqslant\frac{1}{2} \tag{7.3}$$

صدق کند آنگاه

(الف) $f\in\mathcal{US}_H^*$،

(ب) $(1-|b_1|)|z|-\left(\frac{1}{2}-|b_1|\right)\frac{|z|^2}{2}\leqslant|f(z)|\leqslant(1+|b_1|)|z|+\left(\frac{1}{2}-|b_1|\right)\frac{|z|^2}{2}$

کرانهای بالا و پائین با نگاشت همساز زیر برای انتخاب مناسبی از $\theta\in\mathbb{R}$ بدست می آیند:

$$f_{b_1}(z)=z+e^{i\theta}b_1\overline{z}+e^{i\theta}\frac{1-2b_1}{4}\overline{z}^2$$

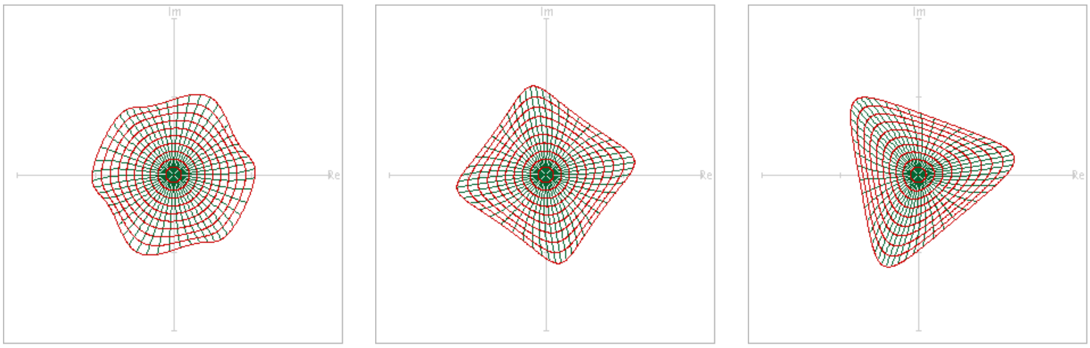
در اینجا $b_1 \in [0, \frac{1}{2}]$.
مثلا توابعی بصورت

$$\vartheta_{n,\alpha,\beta}(z) = z + \alpha z^n + \beta \overline{z}^n, \quad n \geqslant 2\ ;\ |\alpha| + |\beta| \leqslant \frac{1}{2n} \tag{۸.۳}$$

در شرط (۷.۳) قرار گرفته و در نتیجه در رده $\mathcal{US}_H^*$ قرار می گیرند. بخصوص برای $\alpha = 0$ و $|\beta| = \frac{1}{4}$ تابع

$$\vartheta_{2,0,\frac{1}{4}e^{i\varphi}}(z) = z + \frac{1}{4}e^{i\varphi}\overline{z}^2$$

عضوی از $\mathcal{US}_H^*$ است. همچنین این تابع همساز در $\mathbb{D}$ محدب مانا[۱۱] است [۱۲] [۴۴]. تصویر قرص $\mathbb{D}$ تحت $\vartheta_{n,\alpha,\beta}$ بازای مقادیر معینی از n، α و β در (شکل ۲.۳) نمایش داده شده است.



$\vartheta_{5,\frac{1}{20}e^{i\frac{\pi}{2}},\frac{1}{20}e^{i\frac{\pi}{5}}}(z)$ $\qquad$ $\vartheta_{3,0,\frac{3}{20}e^{i\frac{\pi}{5}}}(z)$ $\qquad$ $\vartheta_{2,0,\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{6}}}(z)$

شکل ۲.۳: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت های همساز $\mathcal{US}_H^*$.

در اینجا ما نگاشت همسازی را ملاحظه می کنیم که بخش هم تحلیلی آن شکلی از تابع فوق هندسی گاوس[۱۳] است.

قضیه ۴.۱.۳. [۸۲] در نظر بگیرید که یکی از حالات $a, b \in (-1, \infty)$ با $ab > 0$ و یا $a, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ با $b = \overline{a}$ بین a و b حاکم است. همچنین فرض کنید c عددی حقیقی مثبت و $\alpha \in \mathbb{D}$ است، و نیز

$$f_1(z) = z + \overline{\frac{\alpha}{2} z F(a, b; c; z)}, \tag{۹.۳}$$

$$f_2(z) = z + \overline{\frac{\alpha}{2}(F(a, b; c; z) - 1)}, \tag{۱۰.۳}$$

$$f_3(z) = z + \overline{\frac{\alpha}{2} \int_0^z F(a, b; c; z)\, dt} \tag{۱۱.۳}$$

[۱۱] Stable harmonic convex

[۱۲] نگاشت همساز جهت نگهدار $f = h + g$ را در $\mathbb{D}$ همساز محدب مانا نامیم اگر تمامی نگاشتهای $f_\lambda = h + \lambda g$ برای $|\lambda| = 1$ در $\mathbb{D}$ محدب باشند.

[۱۳] Gaussian hypergeometric function

(الف) اگر $c>\mathbf{Re}\,(a+b)+1$ و

$$|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}(ab+c-a-b-1)\leqslant 1 \tag{۱۲.۳}$$

آنگاه $f_1\in\mathcal{US}_H^*$.

(ب) اگر $c>\mathbf{Re}\,(a+b)+1$ و

$$ab|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\leqslant 1 \tag{۱۳.۳}$$

آنگاه $f_2\in\mathcal{US}_H^*$.

(پ) اگر $c>\mathbf{Re}\,(a+b)$ و

$$|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\leqslant 1 \tag{۱۴.۳}$$

آنگاه $f_3\in\mathcal{US}_H^*$.

نتیجه ۴.۱.۳. [۸۲] برای اعداد حقیقی مثبت b و c و نیز $\alpha\in\mathbb{D}$،

(الف) اگر

$$c\geqslant\beta^+=\frac{2b+3-3|\alpha|+\sqrt{|\alpha|^2+2|\alpha|(2b^2-1)+1}}{2(1-|\alpha|)} \tag{۱۵.۳}$$

سپس تابع $f(z)=z+\overline{\frac{\alpha}{2}zF(1,b;c;z)}$ در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت است.

(ب) اگر

$$c\geqslant\gamma^+=\frac{2b+3+b|\alpha|+\sqrt{b^2|\alpha|^2+4|\alpha|)+2|\alpha|b+1}}{2} \tag{۱۶.۳}$$

آنگاه تابع $f(z)=z+\overline{\frac{\alpha}{2}F(1,b;c;z)-1}$ در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت است.

(پ) اگر $c\geqslant 1+\frac{b}{1-|\alpha|}$ آنگاه تابع $f(z)=z+\overline{\frac{\alpha}{2}\int_0^z F(1,b;c;t)\,dt}$ در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت خواهد بود.

با استفاده از رابطه قضیه ۴.۱.۳ می توان خانواده ای از چندجمله ای های همساز تک ارز یافت که در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون یکنواخت هستند.

نتیجه ۵.۱.۳. [۸۲] اگر m عدد صحیح مثبت، c عددی حقیقی مثبت و $\alpha\in\mathbb{D}$ باشند و

$$F_1(z)\quad=z+\overline{\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}\frac{(m-n+1)_n}{(c)_n}z^{n+1}}, \tag{۱۷.۳}$$

$$F_2(z)\quad=z+\overline{\frac{\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}\frac{(m-n+1)_n}{(c)_n}z^{n}}, \tag{۱۸.۳}$$

$$F_3(z)\quad=z+\overline{\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}\frac{(m-n+1)_n}{(c)_n}\frac{z^{n+1}}{n+1}} \tag{۱۹.۳}$$

(الف) اگر $|\alpha|\Gamma(c)\Gamma(c+2m-1)(m^2+2m+c-1)\leqslant(\Gamma(c+m))^2$ سپس $F_1\in\mathcal{US}_H^*$.

(ب) اگر $m^2|\alpha|\Gamma(c)\Gamma(c+2m-1)\leqslant(\Gamma(c+m))^2$ سپس $F_2\in\mathcal{US}_H^*$.

(پ) اگر $|\alpha|\Gamma(c)\Gamma(c+2m)\leqslant(\Gamma(c+m))^2$ سپس $F_3\in\mathcal{US}_H^*$.

۲.۳ روش پیچش در رده $\mathcal{US}_H^*$

در این بخش شرطی کافی در رده $\mathcal{US}_H^*$ را با استفاده از پیچش می یابیم و در ابتدا نیاز به همتای مجموعه دوگان روی خانواده توابع همساز داریم. گیریم $\mathcal{A}_H$ رده ی توابع همساط مختلط $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ در دامنه همبند ساده $\mathbb{D}$ بوده و به شکل (۴.۲) باشد که لزوما تک ارز و جهت نگهدار روی $\mathbb{D}$ نیست. مجموعه دوگان یک زیرمجموعه از $\mathcal{A}_H$ را چنین تعریف می کنیم:

تعریف ۱.۲.۳. [۶۹] برای مجموعه مفروض $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{A}_H$، مجموعه دوگان $\mathcal{V}_H^*$ عبارتست از

$$\mathcal{V}_H^* = \left\{F = H + \overline{G} \in \mathcal{A}_H : \frac{h * H}{z} + \frac{\overline{g * G}}{\overline{z}} \neq ۰,\ \forall f = h + \overline{g} \in \mathcal{V}_H,\ \forall z \in \mathbb{D}\right\} \quad (۲۰.۳)$$

چنین الگوئی که برگرفته از مجموعه دوگان روی توابع تحلیلی است، ابزاری توانا در مطالعه رده‌های همساز نیز محسوب می شود.

قضیه ۱.۲.۳. [۶۹] گیریم

(۲۱.۳)

$$G_H = \left\{\varphi - \sigma\overline{\varphi} : \varphi(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲(۱-wz)}\left(۱ - \frac{w + i\alpha}{۱ + i\alpha}z\right), \sigma = \frac{\overline{(۱-w)(۱+i\alpha)}}{(۱-w)(۱+i\alpha)}, z \in \mathbb{D}\right\}$$

سپس $\mathcal{US}_H^* = G_H^*$. علاوه بر این اگر $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| + n|b_n| < \frac{۱ - |b_۱|}{\sqrt{M}}$ آنگاه $f \in \mathcal{US}_H^*$، که ثابت $\sqrt{M} = ۱/۲۵۵۷\ldots$ همان ثابت ذکر شده در لم ۳.۱۶.۱ است.

تذکر اینکه تابع تحلیلی φ همان g در لم ۳.۱۶.۱ است اما σ با $|\sigma| = ۱$ عدد دلخواهی نبوده و وابسته به w و α در φ است.

برهان. فرض کنید $f = h + \overline{g} \in \mathcal{US}_H^*$ یعنی

$$\mathbf{Re}\,\frac{(z-\zeta)h'(z) - \overline{(z-\zeta)g'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)} - h(\zeta) - \overline{g(\zeta)}} > ۰\ ,\quad (z,\zeta) \in \mathbb{D}^۲ \quad (۲۲.۳)$$

بازای $\zeta = ۰$ و سپس $z = ۰$ داریم $\frac{(z-\zeta)h'(z) - \overline{(z-\zeta)g'(z)}}{f(z) - f(\zeta)} = ۱$، در نتیجه شرط (۲۲.۳) را می توان بشکل

$$(z-\zeta)h'(z) - \overline{(z-\zeta)g'(z)} \neq i\alpha\Big(h(z) + \overline{g(z)} - h(\zeta) - \overline{g(\zeta)}\Big) \quad (۲۳.۳)$$

که $\alpha \in \mathbb{R}$ نوشت. اما طبق اصل مقدار ماکزیمم برای توابع همساز کافی است که شرط را برای $|\zeta| = |z|$ بررسی نمائیم و بدین جهت با فرض $\zeta = wz$ با $|w| = ۱$، از تعریف مجموعه دوگان برای توابع همساز (۲۰.۳) و سپس محاسبه ساده، نتیجه $\frac{h * \varphi}{z} - \sigma\frac{\overline{g * \varphi}}{\overline{z}} \neq ۰$ حاصل می شود که همان مطلوب ماست.

برای مابقی شرط ضرایب با تابع $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ که بشکل (۱۶.۲) است و بسط سری $\varphi(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}\phi_n z^n$ از تابع تحلیلی $\varphi(z)$ می توان یافت $|\phi_n|\leqslant dn$ که برای تمام $n\geqslant ۲$ برقرار بوده و ثابت دقیق $d=\sqrt{M}=۱/۲۵۵۷\ldots$ را که در لم ۳.۱۶.۱ آمده بدست می دهد. با استفاده از قسمت قبل

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{h*\varphi}{z}-\sigma\frac{\overline{g*\varphi}}{\bar z}\right| &= \left|۱+\sum_{n=۲}^{\infty}a_n\phi_n z^{n-۱}-\sigma\big(b_۱+\sum_{n=۲}^{\infty}\overline{b_n\phi_n}\bar z^{n-۱}\big)\right|\\
&\geqslant |۱-\sigma b_۱|-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n||\phi_n||z|^{n-۱}-|\sigma|\sum_{n=۲}^{\infty}|b_n||\phi_n||z|^{n-۱}\\
&\geqslant |۱-\sigma b_۱|-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|dn-\sum_{n=۲}^{\infty}|b_n|dn\\
&> ۰
\end{aligned}
$$

که $\frac{۱-|b_۱|}{\sqrt{M}}>\sum_{n=۲}^{\infty}n|a_n|+n|b_n|$. □

۳.۳ محدب یکنواخت

حال نگاشت های همساز محدب یکنواخت را بعنوان همتای همساز رده ی $\mathcal{UCV}$ که توسط گودمن [۴۰] و رونینگ [۸۸] معرفی شد را بررسی می کنیم.

تعریف ۱.۳.۳. [۷۰] تابع همساز موضعا تک ارز $f=h+\bar g\in\mathcal{H}$ را نگاشت محدب یکنواخت در $\mathbb{D}$ گوئیم اگر f در $\mathbb{D}$ کاملاً محدب بوده و هر قوس مدور γ_ζ در $\mathbb{D}$ با مرکز ζ که در $\mathbb{D}$ قرار دارد را به قوس محدب $f(\gamma_\zeta)$ در $f(\mathbb{D})$ بنگارد.

که مشابه تعریف ۱.۱۱.۱ برای توابع تحلیلی است. رده ی تمام توابع $f\in\mathcal{S}_H$ (به ترتیب $f\in\mathcal{S}_H^{\circ}$) که در $\mathbb{D}$ محدب یکنواخت هستند را با $\mathcal{UK}_H$ (به ترتیب $\mathcal{UK}_H^{\circ}$) نشان می دهیم. تک ارزی f از این حقیقت که نگاشتهای کاملاً محدب در $\mathbb{D}$ تک ارزند نتیجه می شود [۲۴]. جهت یافتن معادل تحلیلی تعریف فوق، گیریم $\gamma_\zeta=\{\zeta+re^{i\theta}:\theta_۱\leqslant\theta\leqslant\theta_۲\}$ قوس مدوری بمرکز ζ درون $\mathbb{D}$ بوده و Γ_γ تصویر γ_ζ تحت f باشد. قوس Γ_γ را محدب گوئیم اگر شناسه مماس بر Γ_γ تابعی غیرنزولی از θ باشد، یعنی

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(\zeta+re^{i\theta})-f(\zeta)\right\}\right)\geqslant ۰\quad,\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta \qquad (۲۴.۳)$$

با انتخاب $z=\zeta+re^{i\theta}$، که $r>۰$ می بینیم که نابرابری (۲۴.۳) برای هر قوس مدور درون $\mathbb{D}$ درست است اگر و فقط اگر در γ_ζ داشته باشیم

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\frac{\partial}{\partial\theta}\{f(z)-f(\zeta)\}\right)\geqslant ۰$$

از اینجا داریم:

$$\mathbf{Im}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\log\frac{\partial}{\partial\theta}\{f(z)-f(\zeta)\}\Big)\geqslant \circ$$

اما برای قوس مدور γ_ζ از $z=\zeta+re^{i\theta}$ نتیجه می شود $\frac{\partial}{\partial\theta}z=i(z-\zeta)$ و با محاسبه ای ساده می یابیم:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{f(z)-f(\zeta)\}=i\Big\{(z-\zeta)f_z(z)-\overline{(z-\zeta)}f_{\bar{z}}(z)\Big\}=i\,\mathbf{D}_\zeta f(z)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\log i\,\mathbf{D}_\zeta f(z) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\log i\Big\{(z-\zeta)h'(z)-\overline{(z-\zeta)g'(z)}\Big\}\\ &= \frac{i\big[h'(z)+(z-\zeta)h''(z)\big]}{i\,\mathbf{D}_\zeta f(z)}i(z-\zeta)\\ &- \frac{i\overline{\big[g'(z)+(z-\zeta)g''(z)\big]}}{i\,\mathbf{D}_\zeta f(z)}\overline{i(z-\zeta)}\\ &= i\frac{\mathbf{D}^{۲}_\zeta f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)}\end{aligned}$$

بدین ترتیب می بایست داشته باشیم

$$\mathbf{Im}\frac{\partial}{\partial\theta}\log i\,\mathbf{D}_\zeta f(z) \;=\; \mathbf{Re}\frac{\mathbf{D}^{۲}_\zeta f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)}\geqslant\circ$$

و البته برای برخی کاربردهای آتی، این شرط معادل است با

$$\mathbf{Re}\,P(z,\zeta)\geqslant\circ\;\;,\;\;(z,\zeta)\in\mathbb{D}^{۲}\quad(z\neq\zeta)\tag{۲۵.۳}$$

که

$$P(z,\zeta)=\frac{(z-\zeta)h'(z)+(z-\zeta)^{۲}h''(z)+\overline{(z-\zeta)g'(z)}+\overline{(z-\zeta)^{۲}g''(z)}}{(z-\zeta)h'(z)-\overline{(z-\zeta)g'(z)}}$$

لذا اگر $f\in\mathcal{H}$ در $\mathbb{D}$ جهت نگهدار بوده و در نابرابری (۲۵.۳) صدق کند سپس f می باید در $\mathbb{D}$ تک ارز و محدب یکنواخت باشد. یادآور می شویم که $P(\circ,\circ)=۱$ و در مجموع

قضیه ۱.۳.۳. [۷۰] گیریم $f\in\mathcal{H}$ چنان باشد که $f(\circ)=\circ$ و برای تمام $z\in\mathbb{D}$ ها $J_f(z)>\circ$. $f\in\mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر

$$\mathbf{Re}\frac{\mathbf{D}^{۲}_\zeta f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)}\geqslant\circ\;,\;\;(z,\zeta)\in\mathbb{D}^{۲}\tag{۲۶.۳}$$

براحتی می توان بررسی نمود که این رده تحت چرخش، $e^{-i\alpha}f(e^{i\alpha}z)$ بازای α حقیقی، حفظ شده و نیز حافظ انتقال $\frac{۱}{t}f(tz)$، $\circ<t\leqslant ۱$ است. از طرفی دیگر $\mathcal{UK}_H$ شامل تمام توابع

کاملاً محدب و محدب یکنواخت نیز می گردد. همچنین (۲۶.۳) برای تابع تحلیلی $f(z) \in \mathcal{UK}_H$ بشکل (۱.۳) و (۲.۳) با $g = 0$ در شرط زیر قرار می گیرد:

$$\mathbf{Re}\,\frac{\mathbf{D}^2_\zeta f(z)}{\mathbf{D}_\zeta f(z)} = \mathbf{Re}\,\frac{(z-\zeta)^2 h''(z) + (z-\zeta)h'(z)}{(z-\zeta)h'(z)} = \mathbf{Re}\left(1 + (z-\zeta)\frac{h''(z)}{h'(z)}\right) \geqslant 0$$

که $(z,\zeta) \in \mathbb{D}^2$. بنابراین

نتیجه ۱.۳.۳. [۷۰] اگر $f \in \mathcal{UCV}$ تابعی تحلیلی باشد سپس $f \in \mathcal{UK}_H$. لذا $\mathcal{UCV} \subset \mathcal{UK}_H \subset \mathcal{K}_H$. گودمن [۴۰] نشان داد که تابع تحلیلی $f(z) = \frac{z}{1-Az} \in \mathcal{UCV}$ اگر و فقط اگر $|A| \leqslant \frac{1}{3}$ در نتیجه تابع محدب $\ell(z) = \frac{z}{1-z} \notin \mathcal{UK}_H$.

مثال ۱.۳.۳. بازای $|\beta| < 1$ نگاشتهای آفین $f(z) = z + \overline{\beta z} \in \mathcal{UK}_H$، زیرا

$$\mathbf{Re}\,\frac{(z-\zeta) + \overline{(z-\zeta)\beta}}{(z-\zeta) - \overline{(z-\zeta)\beta}} \geqslant 0$$

معادل است با

$$\mathbf{Re}\left((z-\zeta) + \overline{(z-\zeta)\beta}\right)\left(\overline{(z-\zeta)} - (z-\zeta)\beta\right) \geqslant 0$$

یعنی $(1-|\beta|^2)|z-\zeta|^2 \geqslant 0$.

نتیجه ۲.۳.۳. [۷۰] اگر در (۲۶.۳) قرار دهیم $\zeta = 0$ ، تابع همساز $f \in \mathcal{UK}_H$ در $\mathbb{D}$ تک ارز و کاملاً محدب است، پس روشن است که هر تابع همساز که کاملاً محدب نباشد در $\mathcal{UK}_H$ هم نخواهد بود. تابع همساز $f(z) = \mathbf{Re}\,\frac{z}{1-z} + i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2}$ کاملاً محدب نیست ([۳۰]، ص۴۶) یعنی $f \notin \mathcal{UK}_H$.

قضیه ۲.۳.۳. [۷۹] گیریم h و g دارای شکل (۴.۲) باشند به شرطی که $|b_1| < 1$، $f = h + \overline{g}$ و ضرایب در شرط زیر صدق نمایند

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(2n-1)(|a_n| + |b_n|) \leqslant 1 - |b_1| \tag{۲۷.۳}$$

سپس $f \in \mathcal{UK}_H$. کران موجود در (۲۷.۳) برای تابع $f(z) = z - \frac{1}{6}\overline{e^{3i\alpha}z^2}$ با $\alpha \in \mathbb{R}$ دقیق است.

قضیه ۳.۳.۳. [۷۹] فرض کنید $f \in \mathcal{UK}_H$ و Λ مجموعه اندیس گذار باشد. گیریم

$$A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{D}(\zeta_\lambda, R_\lambda) \cap \mathbb{D}(0, r_\lambda)) \neq \phi$$

که $\zeta_\lambda \in \mathbb{D}$، $0 < R_\lambda < 2$، $0 < r_\lambda \leqslant 1$. آنگاه $f(A)$ مجموعه ای محدب است.

در [۸۲] مولفان رده ی محدب یکنواخت را روی نگاشتهای همساز بیشتر بررسی نموده و خواص بیشتری را آشکار نمودند که جزئیات را ذکر خواهیم نمود. قبل از آن، شرطی لازم و کافی برای آنکه $f \in \mathcal{UK}_H$ باشد را ارائه می دهیم. این شرط تعمیم شکلی از قضیه ۱.۷.۲ درباره توابع کاملاً محدب است که توسط چوکه، دورن و آسگود مطرح شده است ([۲۴] ص۱۳۹).

قضیه ۴.۳.۳. [۷۰] گیریم $f(z)\in\mathcal{S}_H$. $f\in\mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر

$$|(z-\zeta)h'(z)|^{۲}\mathbf{Re}\,Q_h \geqslant |(z-\zeta)g'(z)|^{۲}\mathbf{Re}\,Q_g+\mathbf{Re}\left\{(z-\zeta)^{۳}\left(h''(z)g'(z)-h'(z)g''(z)\right)\right\} \tag{۲۸.۳}$$

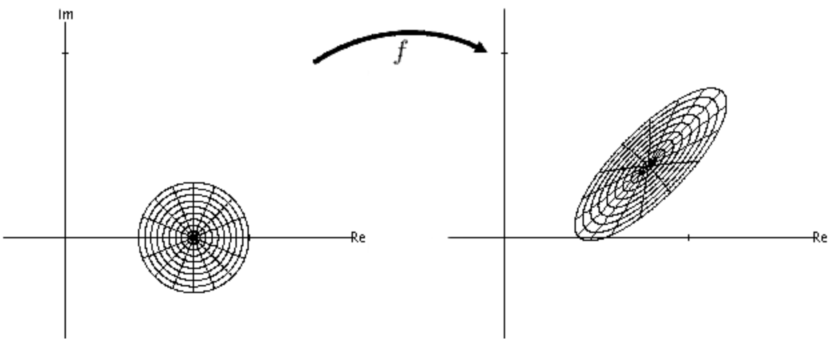
که $Q_h=۱+(z-\zeta)\dfrac{h''(z)}{h'(z)}$ و $Q_g=۱+(z-\zeta)\dfrac{g''(z)}{g'(z)}$ بازای (z,ζ) در $\mathbb{D}^{۲}$.

برهان. مطابق تعریف $f\in\mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر $\mathbf{Re}\,\dfrac{\mathbf{D}^{۲}_{\zeta}f(z)}{\mathbf{D}_{\zeta}f(z)}>۰$ که $(z,\zeta)\in\mathbb{D}^{۲}$، و این اگر و فقط اگر $\mathbf{Re}\left\{\mathbf{D}^{۲}_{\zeta}f(z)\overline{\mathbf{D}_{\zeta}f(z)}\right\}>۰$ برای $(z,\zeta)\in\mathbb{D}^{۲}$، بدین ترتیب محاسبه ساده ای ما را به (۲۸.۳) می رساند. □

لم ۱.۳.۳. [۷۰] $f=h+\overline{\beta h}\in\mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر $h\in\mathcal{UCV}$ که در آن $|\beta|<۱$.

برهان. گیریم $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H$ و $g=\beta h$ با شرط $|\beta|<۱$ باشد پس $f\in\mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر (۲۸.۳) برقرار باشد. چون در این حالت h و g در تساوی $Q_h=Q_g$ صادقند پس (۲۸.۳) برقرار است اگر و فقط اگر $|(z-\zeta)h'(z)|^{۲}\mathbf{Re}\,Q_h(۱-|\beta|^{۲})\geqslant ۰$ یا به طور معادل $\mathbf{Re}\,Q_h\geqslant ۰$ که نشان می دهد $h\in\mathcal{UCV}$. □

مثال ۲.۳.۳. تابع تحلیلی $h=z+Az^{۲}$ در $\mathcal{UCV}$ است اگر و فقط اگر $|A|\leqslant\frac{۱}{۶}$. [۴۰]. از لم ۱.۳.۳ می دانیم $f(z)=z+Az^{۲}+\overline{\beta z+\beta Az^{۲}}\in\mathcal{UK}_H$ برای $|\beta|<۱$ و $|A|\leqslant\frac{۱}{۶}$. مثلا بگیرید $A=\frac{۱}{۶}$، $\beta=-\frac{i}{۲}$ سپس $f=z+\frac{۱}{۶}z^{۲}\overline{-\frac{i}{۲}z-\frac{i}{۱۲}z^{۲}}\in\mathcal{UK}_H$. در شکل ۳.۳ دایره $|z-۰/۷|<۰/۳$ تحت این نگاشت همساز محدب یکنواخت به ناحیه ای بیضی شکل محدب بمرکز $f(\zeta)=(۰/۷۸,۰/۳۹)$ نگاشته می شود.



شکل ۳.۳: تصویر $|z-۰/۷|<۰/۳$ تحت نگاشت $f(z)=z+\frac{۱}{۶}z^{۲}\overline{-\frac{i}{۲}z-\frac{i}{۱۲}z^{۲}}\in\mathcal{UK}_H$.

قضیه ۵.۳.۳. [۸۲] در نظر بگیرید که یکی از حالات $a,b\in(-۱,\infty)$ با $ab>۰$ و یا $a,b\in\mathbb{C}\backslash\{۰\}$ با $b=\overline{a}$ بین a و b حاکم است. همچنین فرض کنید c عددی حقیقی مثبت و $\alpha\in\mathbb{D}$ است، آنگاه

(الف) اگر $c > \mathbf{Re}\,(a+b)+2$ و

$$|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left(\frac{2(a)_2(b)_2}{(c-a-b-2)_2}+\frac{5ab}{c-a-b-1}+1\right)\leqslant 2 \qquad (۲۹.۳)$$

آنگاه $f_1 \in \mathcal{UK}_H$.

(ب) اگر $c > \mathbf{Re}\,(a+b)+2$ و

$$ab|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left(\frac{a+b+c+2ab}{c-a-b-2}\right)\leqslant 2 \qquad (۳۰.۳)$$

آنگاه $f_2 \in \mathcal{UK}_H$.

(پ) اگر $c > \mathbf{Re}\,(a+b)+1$ و

$$|\alpha|\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left(\frac{2ab+c-a-b-1}{c-a-b-1}\right)\leqslant 2 \qquad (۳۱.۳)$$

آنگاه $f_3 \in \mathcal{UK}_H$.

در اینجا f_1، f_2 و f_3 همان توابع تعریف شده در قضیه ۴.۱.۳ هستند.

قضیه الکساندر برای توابع تحلیلی (۱.۴.۱) را نمی توان بطریقی مشابه بین رده های

$$\mathcal{UCV} := \mathcal{UK}_H \cap \{f = h+\overline{g} : g\equiv 0\} \text{ و } \mathcal{UST} := \mathcal{US}^*_H \cap \{f = h+\overline{g} : g\equiv 0\} \qquad (۳۲.۳)$$

بیان کرد [۴۰، ۸۸]، اما می توان پلی ارتباطی میان $\mathcal{US}^*_H$ و $\mathcal{UK}_H$ ایجاد نمود. عملگر

$$f = h+\overline{g} \mapsto \Lambda_f = \Lambda_h + \overline{\Lambda_g} \qquad (۳۳.۳)$$

را در نظر بگیرید که یک تابع $f \in \mathcal{US}^*_H$ را به $\Lambda_f \in \mathcal{UK}_H$ می نشاند. تاکید ویژه ما بر $\Lambda_h =$ $H_{a,b}(h)$ بازای $a,b\in\mathbb{R}$، $a\neq b$، $a>-1$ و $b>-1$ استوار است که در آن

$$H_{a,b}(h)(z) = \frac{(a+1)(b+1)}{(b-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t^{b-a})h(tz)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(b+1)}{(a+n)(b+n)}a_n z^n \qquad (۳۴.۳)$$

بوده و $h(z) = z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ است.

این تبدیلات انتگرالی ما را با پیچش f با رده ی معینی از توابع خاص رهنمون می سازد [۸۰]. بخصوص با در نظر گرفتن حالت حدی $b\to\infty$ عملگر نوع برناردی[۱۴] حاصل می شود. با در نظر گرفتن دو حالت حدی $H_{a,b}(h)$ را با تعاریف

$$H_{a,\infty}(h)(z) = \lim_{b\to\infty} H_{a,b}(h)(z) = \frac{a+1}{z^a}\int_0^z t^{a-1}h(t)\,dt \qquad (۳۵.۳)$$

و

$$H_{a,a}(h)(z) = \lim_{b\to a} H_{a,b}(h)(z) = -(a+1)^2\int_0^1 t^{a-1}\,h(tz)\log t\,dt \qquad (۳۶.۳)$$

بحث را پی می گیریم [۸۰]. دقت شود که

$$H_{a,\infty}(h)(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a+1}{a+n}a_n z^n \text{ و } H_{a,a}(h)(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)^2}{(a+n)^2}a_n z^n \qquad (۳۷.۳)$$

[۱۴] Bernardi type operator

قضیه ۶.۳.۳. [۸۲] فرض کنید $f = h + \overline{g} \in \mathcal{H}$ بفرم (۴.۲) بوده و در شرط ضریب (۷.۳) صدق نماید. قرار دهید $H = \Lambda_h$ و $G = \Lambda_g$. سپس تابع همساز $F(z) = H(z) + \overline{G(z)} \in \mathcal{UK}_H$ است مشروط بر اینکه $a > -۱$، $b > -۱$ بوده و در یکی از شروط زیر صدق کند:

(الف) $ab \leqslant ۳$.

(ب) $ab > ۳$ و $a^۲b^۲ - ۴ab - ۲(a+b) \leqslant ۱$.

برخلاف تحقق شروط فوق، حالات خاصی نیز بچشم می خورد چنانکه در اثبات قضیه ۶.۳.۳ اگر $ab > ۳$ و $a^۲b^۲ - ۴ab - ۲(a+b) > ۱$ و $\lfloor r_۱ \rfloor - \lfloor r_۲ \rfloor = ۰$ آنگاه تابع $F(z)$ تعریف شده در قضیه ۶.۳.۳ در رده ی $\mathcal{UK}_H$ واقع می شود که در آن $r_۱$ و $r_۲$ ریشه های حقیقی معادله ی $\phi(n) = ۰$ بوده و $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی با x است. مثلاً با اخذ $a = ۲$ و $b = \frac{۵۹}{۲۰}$ هیچکدام از شروط (الف) و (ب) قضیه ۶.۳.۳ درست نیستند با اینحال

$$\phi(n) = ۲n^۲ - \frac{۶۹}{۵}n + \frac{۴۷۳}{۲۰} > ۰ \quad \text{برای هر} \quad n \geqslant ۲ \tag{۳۸.۳}$$

در نتیجه تابع متناظر $F(z)$ با $a = ۲$ و $b = \frac{۵۹}{۲۰}$ در $\mathcal{UK}_H$ خواهد بود [۸۲].

قضیه ۷.۳.۳. [۸۲] در نظر بگیرید $F = H + \overline{G} \in \mathcal{H}$، $G'(۰) = ۰$ در شرط ضریب (۲۷.۳) صدق کند. برای h_a و g_a با تعاریف

$$h_a(z) = \frac{aH(z) + zH'(z)}{a+۱} \quad \text{و} \quad g_a(z) = \frac{aG(z) + zG'(z)}{a+۱} \tag{۳۹.۳}$$

که $a \geqslant ۱$، تابع همساز $f_a(z) = h_a(z) + \overline{g_a(z)} \in \mathcal{US}^*_H$ است.

۴.۳ روش پیچش در رده $\mathcal{UK}_H$

با استفاده از مجموعه دوگان توابع همساز می توانیم شرطی کافی را برای اعضاء رده ی $\mathcal{UK}_H$ بیابیم:

قضیه ۱.۴.۳. [۷۰] فرض کنید

$$G_H = \{\varphi - \sigma\overline{\varphi} : \varphi(z) = \frac{z}{(۱-z)^۳}\Big(۱ - \frac{w - i\alpha}{۲ - w - i\alpha}z\Big), \sigma = \frac{\overline{(۱-w)(۲-w-i\alpha)}}{(۱-w)(۲-w-i\alpha)}, z \in \mathbb{D}\}$$

آنگاه $\mathcal{UK}_H = G^*_H$. علاوه بر این اگر $\sum_{n=۲}^{\infty} n(۲n-۱)|a_n| + n(۲n-۱)|b_n| < ۱ - |b_۱|$ سپس $f \in \mathcal{UK}_H$.

در اینجا نیز تابع تحلیلی φ همان تابع g در لم ۴.۱۶.۱ بوده ولی σ با $|\sigma| = ۱$ عددی دلخواه نیست و وابسته به هر دو پارامتر w و α در φ می باشد.

برهان. گیریم $f = h + \overline{g} \in \mathcal{UK}_H$ یعنی

$$\mathbf{Re}\,\frac{(z-\zeta)^{۲}h''(z)+\overline{(z-\zeta)^{۲}g''(z)}+(z-\zeta)h'(z)+\overline{(z-\zeta)g'(z)}}{(z-\zeta)h'(z)-\overline{(z-\zeta)g'(z)}} > ۰\,, \quad (z,\zeta)\in\mathbb{D}^{۲} \tag{۴۰.۳}$$

بازای $\zeta = ۰$ و سپس $z = ۰$ داریم $\frac{\mathbf{D}_{\zeta}^{۲}f(z)}{\mathbf{D}_{\zeta}f(z)} = ۱$، که با شرط (۴۰.۳) می توان نوشت

$$(z-\zeta)^{۲}h''(z)+\overline{(z-\zeta)^{۲}g''(z)}+(z-\zeta)h'(z)+\overline{(z-\zeta)g'(z)} \neq i\alpha\Big((z-\zeta)h'(z)-\overline{(z-\zeta)g'(z)}\Big)$$

که $\alpha\in\mathbb{R}$. طبق اصل مقدار ماکزیمم برای توابع همساز کافی است که شرط را برای $|\zeta| = |z|$ بررسی نمائیم و بدین جهت با فرض $\zeta = wz$ با $|w| = ۱$، از تعریف مجموعه دوگان برای توابع همساز (۲۰.۳) و سپس محاسبه‌ای سرراست نتیجه $\frac{h*\varphi}{z}+\sigma\frac{\overline{g*\varphi}}{\overline{z}} \neq ۰$ حاصل می شود که نتیجه نخست را ثابت می کند.

برای شرط ضرایب با تابع $f(z) = h(z)+\overline{g(z)}$ که بشکل (۴.۲) است و بسط سری $\varphi(z) = z+\sum_{n=۲}^{\infty}\phi_n z^n$ برای تابع تحلیلی $\varphi(z)$ می توان یافت که بازای تمام $n \geqslant ۲$ بموجب لم ۴.۱۶.۱، $|\phi_n| \leqslant n(۲n-۱)$. همچنین

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h*\varphi}{z}+\sigma\frac{\overline{g*\varphi}}{\overline{z}}\right| &= \left|۱+\sum_{n=۲}^{\infty}a_n\phi_n z^{n-۱}+\sigma\Big(b_۱+\sum_{n=۲}^{\infty}\overline{b_n\phi_n}\,\overline{z}^{n-۱}\Big)\right| \\
&\geqslant |۱+\sigma b_۱|-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n||\phi_n||z|^{n-۱}-|\sigma|\sum_{n=۲}^{\infty}|b_n||\phi_n||z|^{n-۱} \\
&\geqslant |۱+\sigma b_۱|-\sum_{n=۲}^{\infty}n(۲n-۱)|a_n|-\sum_{n=۲}^{\infty}n(۲n-۱)|b_n| \\
&> ۰
\end{aligned}$$

در نتیجه $|b_۱| - ۱ > \sum_{n=۲}^{\infty} n(۲n-۱)|a_n|+n(۲n-۱)|b_n|$. □

۵.۳ مطلقاً محدب

مفهومی که اخیراً معرفی شده، خانواده ای از توابع همساز محدب است که توسط پوناسمی، سایرام کالیراج و استارکف[۱۵] بیان گردیده [۸۲] و تعریف آن چنین است:

تعریف ۱.۵.۳. [۸۲] یک تابع همساز موضعا تک ارز $f = h+\overline{g}\in\mathcal{H}$ را در $\mathbb{D}$ مطلقاً محدب[۱۶] نامیم اگر $f(\mathbb{D}(a,r))$ برای هر $a\in\mathbb{D}$ و تمام $r\in(۰,۱-|a|)$ ها محدب باشد. این خانواده را با $f\in\mathcal{AK}_H$ نشان می دهیم.

[۱۵] Starkov

[۱۶] Absolutely convex

گیریم $\mathcal{AK}_H^{\circ}=\{f=h+\overline{g}\in\mathcal{AK}_H : g'(\circ)=\circ\}$ و

$$\widetilde{\mathcal{AK}_H}=\{f\in\mathcal{AK}_H:\ \text{برای تمام } a\in\mathbb{D} \text{ و } r\in(\circ,1-|a|] \text{ محدب است.}\ f(\mathbb{D}(a,r))\} \tag{۴۱.۳}$$

داریم

$$\mathcal{UK}_H\subset\widetilde{\mathcal{AK}_H}\subset\mathcal{AK}_H\subset\mathcal{FK}_H \tag{۴۲.۳}$$

می توان نشان می دهد که رده های $\widetilde{\mathcal{AK}_H}$ و $\mathcal{AK}_H$ خانواده های پایای خطی از نگاشت های همساز تک ارز هستند یعنی هنگامی که $f=h+\overline{g}\in\mathcal{AK}_H$ (به ترتیب $\widetilde{\mathcal{AK}_H}$)، تابع

$$F(z)=\frac{f(\frac{z+z_\circ}{1+z\overline{z_\circ}}e^{i\theta})-f(z_\circ e^{i\theta})}{(1-|z_\circ|^{2})h'(z_\circ e^{i\theta})e^{i\theta}} \tag{۴۳.۳}$$

برای تمام $z_\circ\in\mathbb{D}$ و $\theta\in\mathbb{R}$ نیز در رده ی $\mathcal{AK}_H$ (به ترتیب $\mathcal{AK}_H^{\circ}$) قرار خواهد گرفت، بهمانصورت که خودریختی قرص دایره را به دایره می برد، و این موضوع را می توان از تعریف نیز حاصل نمود. این خانواده از توابع دارای خاصیت پایای آفین[۱۷] هم هستند. یعنی اگر $f\in\mathcal{AK}_H$ (به ترتیب $\widetilde{\mathcal{AK}_H}$) باشد آنگاه برای تمام $c\in\mathbb{D}$ که $b_1=g'(\circ)$ تابع $\frac{f+c\overline{f}}{1+cb_1}\in\mathcal{AK}_H$ (به ترتیب $\widetilde{\mathcal{AK}_H}$). بعنوان نتیجه ای از این خواص بیان شده، نتایج جالبی را از رده ی $\mathcal{AK}_H$ می توان بدست آورد.

قضیه ۱.۵.۳. [۸۲] گیریم $f=h+\overline{g}\in\mathcal{H}$ تابع همساز جهت نگهداری در $\mathbb{D}$ باشد. عبارات زیر معادلند:

(الف) $f\in\mathcal{AK}_H$.

(ب) $f\in\widetilde{\mathcal{AK}_H}$.

(پ)

$$|h'(\zeta)|^{2}\left(1+|b|^{2}+\mathbf{Re}\left\{\frac{(\zeta-b)(1-\zeta\overline{b})h''(\zeta)}{h'(\zeta)}-2\overline{b}\zeta\right\}\right)\geqslant \tag{۴۴.۳}$$
$$|g'(\zeta)|^{2}\left(1+|b|^{2}+\mathbf{Re}\left\{\frac{(\zeta-b)(1-\zeta\overline{b})g''(\zeta)}{g'(\zeta)}-2\overline{b}\zeta\right\}\right)+\mathbf{Re}\left\{\frac{(\zeta-b)^{3}(1-\zeta\overline{b})^{3}}{|\zeta-b|^{2}|1-\zeta\overline{b}|^{2}}\right\}$$

برای تمام ζ ها و b در $\mathbb{D}$.

در [۱۱۱] مولف تعریف جدیدی برای خانواده های پایای خطی ارائه داده و مرتبه پایای خطی یک خانواده L از نگاشت های همساز f که به شکل (۴.۲) هستند را بصورت

$$\overline{\text{ord}}L=\sup_{f\in L}\frac{|a_2-\overline{b_1}b_2|}{1-|b_1|^{2}} \tag{۴۵.۳}$$

تعریف کرده و کران های بالا و پائین برای ژاکوبین تابع f و نیز نتایج جالبی دیگری را یافت [۹۹].

[۱۷] Affine invariance property

لم ۱.۵.۳. ([۳۷]) فرض کنید L خانواده ای پایای خطی از نگاشتهای همساز باشد. آنگاه $\overline{\text{ord}}L = \sup_{f\in A^\circ[L]} |a_۲|$ که

$$A^\circ[L] = \left\{F = \frac{f+\varepsilon\overline{f}}{۱+\varepsilon\overline{b_۱}} : f\in L, \varepsilon\in\mathbb{D}, F_{\overline{z}}(۰)=۰\right\} \tag{۴۶.۳}$$

قضیه ۲.۵.۳. (cf. [۹۹]) گیریم $f\in L$ با $b_۱ = f_{\overline{z}}(۰)$ است که L در فوق بیان شد. سپس ژاکوبین J_f نگاشت f با هر $z\in\mathbb{D}$ در کران های

$$(۱-|b_۱|^۲)\frac{(۱-|z|)^{۲\alpha_۰-۲}}{(۱+|z|)^{۲\alpha_۰+۲}} \leqslant J_f(z) \leqslant (۱-|b_۱|^۲)\frac{(۱+|z|)^{۲\alpha_۰-۲}}{(۱-|z|)^{۲\alpha_۰+۲}} \tag{۴۷.۳}$$

صدق می کند که در آنها $\alpha_۰ = \overline{\text{ord}}L$.

اکنون خواص پایای خطی و خاصیت پایای آفین از رده ی $\mathcal{AK}_H$ را بکار گرفته و ویژگی های رشد، پوشش و نیز قضیه مساحت را مورد بحث قرار می دهیم.

قضیه ۳.۵.۳. [۸۲] فرض کنید f بفرم (۴.۲) بوده و $f\in\mathcal{AK}_H^\circ$ باشد. آنگاه ضریب $a_۲$ در شرط $|a_۲| \leqslant \frac{۲}{\sqrt{۳}} \approx ۱/۱۵۴۷$ صدق می کند. همچنین هر تابع $f\in\mathcal{AK}_H^\circ$ در نابرابرای های

$$\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۴}\left[۱-\left(\frac{۱-r}{۱+r}\right)^{\frac{\sqrt{۳}+۴}{۲\sqrt{۳}}}\right] \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۴}\left[\left(\frac{۱+r}{۱-r}\right)^{\frac{\sqrt{۳}+۴}{۲\sqrt{۳}}}-۱\right] \tag{۴۸.۳}$$

بازای $۰<|z|=r<۱$ صادق می باشد. بخصوص اینکه برد هر تابع $f\in\mathcal{AK}_H^\circ$ شامل قرص $|w| < \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۴} \approx ۰/۳۰۲۱۶۹$ است.

نابرابری (۴۸.۳) حاصل نتیجه اس از شیل_سمال روی خانواده ای از نگاشتهای همساز تک ارز با خاصیت پایای خطی است [۹۵].

ملاحظه ۱.۵.۳ [۸۲] اگر f بشکل (۴.۲) بوده و $f\in\mathcal{AK}_H^\circ$ با $a_۲\geqslant ۰$ باشد سپس $a_۲+\mathbf{Re}\, b_۲ \leqslant ۱$. این نابرابری برای توابع رده $f\in\mathcal{AK}_H^\circ$ در تحدید به توابع تحلیلی دقیق است.

قضیه ۴.۵.۳. [۸۲] گیریم $f\in\mathcal{AK}_H$ به شرط $b_۱=f_{\overline{z}}(۰)$ باشد. سپس ژاکوبین J_f نگاشت f با هر $z\in\mathbb{D}$ در کران های

$$(۱-|b_۱|^۲)\frac{(۱-|z|)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}-۲}}{(۱+|z|)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}+۲}} \leqslant J_f(z) \leqslant (۱-|b_۱|^۲)\frac{(۱+|z|)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}-۲}}{(۱-|z|)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}+۲}} \tag{۴۹.۳}$$

صدق کرده و مقدار $A(f(\mathbb{D}_r))$، مساحت $f(\mathbb{D}_r)$، دارای کران های زیر است:

$$\frac{\pi(۱-|b_۱|^۲)}{۲۶}\left\{۳-(۳r^۲+۸\sqrt{۳}r+۳)\frac{(۱-r)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}-۱}}{(۱+r)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}+۱}}\right\} \leqslant A(f(\mathbb{D}_r)) \tag{۵۰.۳}$$

و

$$A(f(\mathbb{D}_r)) \leqslant \frac{\pi(۱-|b_۱|^۲)}{۲۶}\left\{۳-(۳r^۲-۸\sqrt{۳}r+۳)\frac{(۱+r)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}-۱}}{(۱-r)^{\frac{۴}{\sqrt{۳}}+۱}}\right\} \qquad (۵۱.۳)$$

قضیه ۵.۵.۳. [۸۲] فرض نمائید f بفرم (۴.۲) بوده و $f \in \mathcal{UK}_H^\circ$ باشد. آنگاه ضریب $a_۲$ در شرط $|a_۲| \leqslant \frac{۱}{\sqrt{۳}} \approx ۰/۵۷۷۳۵$ صدق کرده و هر تابع $f \in \mathcal{UK}_H^\circ$ در نابرابری (۴۸.۳) قرار می گیرد.

کران ضریب حاصل شده در قضیه ۵.۵.۳ را می توان بعنوان شرطی لازم جهت بررسی اینکه یک تابع در رده ی $\mathcal{UK}_H^\circ$ قرار بگیرد، بکار گرفت. برای یک تابع همساز $f \in \mathcal{UK}_H^\circ$ کران های موجود در نابرابری های (۴۸.۳) قابل بهبودی نیستند زیرا رده ی $\mathcal{UK}_H^\circ$ خانواده ای پایای خطی نیست.

مراجع

[۱] سیلورمن هرب (۱۳۶۹)، **متغیرهای مختلط**، ترجمه محسن نقشینه ارجمند، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه اصفهان.

[2] Ahuja Om P., Jahangiri J. M. and Silverman H. (2003), ”Convolutions for special classes of harmonic univalent functions”, **Applied Mathematics Letters**, 16 (6), pp. 905-909.

[3] Ahuja Om P. (2005), ”Planar harmonic univalent and related mappings”, **J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 6 (4), Art-122.

[4] Ali R. M., Khan M. H., Ravichandran V. and Subramanian K. G. (2006), ”A class of multivalent functions with negative coefficients defined by convolution”, **Bull. Korean Math. Soc.**, 43 (1), 179-188.

[5] Ali R. M. and Ravichandran V. (2011), ”Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions”, **Mathematics Newsletter, Ramanujan Mathematical Society**, 21 (1), pp. 16-30.

[6] Ali R. M., Stephen B. A. and Subramanian K. G. (2010), ”Subclasses of harmonic mappings defined by convolution”, **Applied Mathematics Letters**, Vol. 23 (10).

[7] Al-Amiri H. and Mocanu P. T. (1981), ”Spirallike nonanalytic functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 82 (1), pp. 61-65.

[8] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), ”On Harmonic Functions Defined by Derivative Operator”, **J. Inequal. Appl.**, 10 pp. Art. ID 263413.

[9] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), ”On Goodman-Ronning-Type harmonic univalent functions defined by Ruscheweyh operator”, **Int. Math.**, Forum 3, no. 44, pp.2161-2174.

[10] Azizi S., Ebadian A. and Najafzadeh Sh. (2015), ”Coefficient Estimates for a Subclass of Bi-univalent Functions”, **Comm. Adv. Comp. Sci. App.**, 1, pp. 41-44.

[11] Bazilevič I. E. (1955), ”On a case of integrability in quadratures in the Loewner-Kufarev equation” (Russian), **Mat. Sb. (N.S.)**, 37 (79)(3), pp. 471-476.

[12] Bieberbach L. (1916), ”Ober die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln”, **Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften**, pp. 940-955.

[13] Brannan D. A. and Clunie J. G. (1980), ”**Aspects of Contemporary Complex Analysis**”, Academic Press, NY.

[14] Brannan D. A., Clunie J. G. and Kirwan W. E. (1970), ”Coefficient estimates for a class of starlike functions”, **Can. J. Math.**, 22, pp. 476-485.

[15] Brannan D. A. and Kirwan W. E. (1969), ”On some classes of bounded univalent functions”, **J. London Math. Soc.**, 1 (2), pp. 431-443.

[16] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), ”On some classes of bi-univalent functions”, **Studia Univ. Babes-Bolyai Math.**, 31 (2), pp. 70-77.

[17] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), ”On some classes of bi-univalent functions”, **KFAS Proceedings Series, v. 3, Pergamon Press (Elsevier Science Limited), Oxford**, pp. 53-60.

[18] Brown J. E. (1989), ”Images of disks under convex and starlike functions”, **Math. Z.**, 202 (4), pp. 457-462.

[19] Çaglar M., Deniz E. and Srivastava H. M. (2017), ”Second Hankel determinant for certain subclasses of bi-univalent functions”, **Turkish J. Math.**, 41, pp. 694-706.

[20] Çaglar M., Orhan H. and Yagmur N. (2012), ”Coefficient Bounds For New Subclasses of Bi-Univalent Functions”, **Faculty Sci. Math. Uni. Nis, Serbia**, 27 (7), pp. 1165-1171.

[21] Chen M. (1975), ”On the regular functions satisfying $\mathbf{Re}\,\frac{f(z)}{z} > \alpha$”, **Bull. Inst. Math. Acad. Sinica**, 3, pp. 65-70.

[22] Catas A., Oros G. I. and Oros G. (2008), ”Differential subordinations associated with multiplier transformations”, **Abstr. Appl. Anal.**, ID 845724:1-11.

[23] Chichra P. N. (1977), ”New subclasses of the class of close-to-convex functions”, **Proc. Am. Math. Soc.**, 62, pp. 37-43.

[24] Chuaqui M., Duren P. and Osgood B. (2004), ”Curvature properties of planar harmonic mappings”, **Comput. Methods Funct. Theory**, 4 (1), pp. 127-142.

[25] Clunie J. and Sheil-Small T. (1984), ”Harmonic Univalent Functions”, **Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.**, 9 (2), pp. 3-25.

[26] de Branges L. (1985), ”A proof of the Bieberbach conjecture”, **Acta Mathematica**, 154, pp. 137-152.

[27] Ding S. S., Ling Y. and Bao G. J. (1995), ”Some properties of a class of analytic functions”, **J. Math. Anal. Appl.**, 195 (1), pp. 71-81.

[28] Dorff M. (2001), ”Convolutions of planar harmonic convex mappings”, **Comp. Var. Theory Appl.**, 45 (3), pp. 263-271.

[29] Dorff M., Nowak M. and Woloszkiewicz M. (2012), ”Convolutions of harmonic convex mappings”, **Complex Variables and Elliptic Equations**, 57 (5), pp. 489-504.

[30] Duren P. L. (2004), ”**Harmonic Mappings in the Plane**”, Cambridge Tracts in Mathematics, 156, Cambridge University Press, Cambridge.

[31] Duren P. L. (1983), ”**Univalent Functions**”, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg and Tokyo.

[32] Dziok J. and Srivastava H. M. (1999), ”Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function”, **Appl. Math. Comput.**, 103, pp. 1-13.

[33] Eenigenburg P. J., Miller S. S., Mocanu P. T. and Reade M. O. (1974), ”On a subclass of Bazilevič functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 45, pp. 88-92.

[34] El-Ashwah R. M. (2014), ”Subclasses of bi-univalent functions defined by convolution”, **J. Egypt. Math. Soc.**, 22 (3), pp. 348-351.

[35] Ezhilarasi R. and Sudharsan T. V. (2013), ”A Subclass of Harmonic Functions Associated with a Convolution Structure”, **Ann. Pure & App. Math.**, 4 (2), pp. 182-191.

[36] Frasin B. A. and Aouf M. K. (2011), ”New subclasses of bi-univalent functions”, **Appl. Math. Lett.**, 24, pp. 1569-1573.

[37] Ganenkova E. and Starkov V. V. (2015), ”Regularity theorems for harmonic functions”, **J. Appl. Anal.**, 21 (1), 1-12.

[38] Garabedian P. R. and Schiffer M. (1955), ”A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 4, pp. 427-455.

[39] Gilman J. P., Kra I. and Rodr guedriguez R. E. (2007), ”**Complex Analysis**”, Springer.

[40] Goodman A. W. (1991), ”On Uniformly Convex Functions”, **Ann. Polon. Math.**, 56, pp. 87-92.

[41] Goodman A. W. (1991), ”On Uniformly Starlike Functions”, **J. Math. Ana. & App.**, 155, pp. 364-370.

[42] Goodman A. W (1983)., ”**Univalent Functions**”, Polygonal, Washington, NJ.

[43] Hallenbeck D. J. and Ruscheweyh St. (1975), ”Subordination by convex functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 52, pp. 191-195.

[44] Hernandez R. and Martn M. J. (2013), ”Stable geometric properties of analytic and harmonic functions”, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 155 (2), pp. 343-359.

[45] Horowitz D. (1978), ”A Further Refinement for Coefficient Estimates of Univalent Functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 71, 217-221.

[46] Jahangiri J. M. (1998), ”Coefficient bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska Sect.**, A 52 (2), 57-66.

[47] Jahangiri J. M. (1999), ”Harmonic Functions Starlike in the Unit Disk”, **J. Math. Anal. Appl.**, 235 (2), pp. 470-477.

[48] Jahangiri J. M., Murugusundaramoorthy G. and Vijaya K. (2002), ”Salagean-type harmonic univalent functions”, **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 77-82 (electronic).

[49] Kim Y. C. and Ponnusamy S. (1999), ”Sufficiency for gaussian hypergeometric functions to be uniformly convex”, **Internat. J. Math. Math. Sci.**, 22 (4), 765-773.

[50] Kulshrestha P. K. (1973), ”Generalized Convexity in Conformal Mappings”, **J. Math. anal. App.**, 3, pp. 441-449.

[51] Kumar R., Gupta S. and Singh S. (2012), ”Convolution Properties of Convex Harmonic Functions”, **Int. J. Open Prob. Compl. Anal.**, 4 (3), pp. 69-77.

[52] Kuroki K. and Owa S. (2011), ”Notes on new class for certain analytic functions”, **RIMS Kokyuroku**, 1772, pp. 21-25,.

[53] Lewandowski Z., Miller S. S. and Zlotkiewicz E. J. (1976), ”Generating functions for some classes of univalent functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, vol. 56, pp. 111-117.

[54] Lewin M. (1967), ”On a coefficient problem for bi-univalent functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 18, pp. 63-68.

[55] Libera R. J. (1965), ”Some classes of regular univalent functions”, **Proceedings of the American Mathematical Society**.

[56] Lowner K. (1923), ”Untersuchungen tiber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises”, **Math. Ann.**, 89, pp. 102-121.

[57] Ma W. and Minda D. (1992), ”Uniformly convex functions”, **Ann. Polon. Math.**, 57, 165-175.

[58] MacGregor T. H. (1962), ”Functions whose derivative has a positive real part”, **Trans. Am. Math. Soc.**, 104, pp. 532-537.

[59] Markes E. P., Robertson M. S. and Scott W. T. (1962), ”On Products of Starlike Functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 13, pp. 960-964.

[60] Marx A. (1932), ”Untersuchungen uber schlichte Abbildungen”, **Math. Ann.**, 107 (1), pp. 40-67.

[61] Merkes E. and Salmassi M. (1992), ”Subclasses of uniformly starlike functions”, **Internat. J. Math. & Math. Sci.**, 15 (3), pp. 449-454.

[62] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1993), ”Averaging operators and a generalized Robinson differential inequality”, **J. Math. Anal. Appl.**, 173, pp. 459-469.

[63] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1996), ”A Class of Nonlinear Averaging Integral Operators”, **J. Math. Anal. Appl.**, 197, pp. 313-323.

[64] Mocanu P. T. (1980), ”Starlikeness and convexity for nonanalytic functions in the unit disc”, **Mathematica (Cluj).**, 22 (45), pp. 77-83.

[65] Motamednezhad A., Nosrati S. and Zaker S. (2019), ”Bounds for initial MacLaurin coefficients of a subclass of bi-univalent functions associated with subordination”, **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.**, 68 (1), pp. 125-135.

[66] Murugusundaramoorthy G. (2003), ”A class of Ruscheweyh-type harmonic univalent functions with varying arguments”, **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 90-95 (electronic).

[67] Netanyahu E. (1969), ”The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < ۱$”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 32 (2), pp. 100-112.

[68] Nezhmetdinov I. R. (1997), ”Classes of Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions as Dual Sets”, **J. Math. Anal. Appl.**, 216, pp. 40-47.

[69] Nosrati S. and Zireh A. (2018), ”On Starlike Harmonic Functions”, **TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics**, to appear.

[70] Nosrati S. and Zireh A. (2020), ”On Fully-Convex Harmonic Functions and their Extension”, **Bol. Soc. Paran. Mat.**, (3s.) 38 (2), pp. 51-60.

[71] Nunokawa M. and Sokol J. (2013), ”Strongly gamma-starlike functions of order alpha”, **Ann. Uni. Mariae Curie-Sklodowska Lublin-Polonia**, vol LXVII (2), pp. 43-51.

[72] Ozawa M. (1969), ”An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient”, **Kodai Math. Sere. Rep.**, 21, pp. 129-132.

[73] Pederson R. N. (1968), ”A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 31, pp. 331-351.

[74] Pederson R. N. and Schiffer M. (1972), ”A proof of the Bieberbach conjecture of the fifth coefficient”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 45, pp. 161-193.

[75] Pólya G. and Schoenberg I. J. (1958), ”Remarks on de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle”, **Pacific J. Math.**, 8 (2), pp. 295-334.

[76] Pommerenke C. (1963), ”On starlike and close-to-convex functions”, **Proc. London Math. Soc.**, 3-13 (1), pp. 290-304.

[77] Pommerenke C. (1975), ”**Univalent Functions**”, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

[78] Ponnusamy S. and Sairam Kaliraj A. (2014), ”Univalent harmonic mappings convex in one direction”, **Anal. & Math. Phys.**, 4 (3).

[79] Ponnusamy S., Prajapat J. K. and Sairam Kaliraj A. (2015), ”Uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings”, **J. Anal.**, 23, pp. 121-129.

[80] Ponnusamy S. and Rønning F. (1997), ”Duality for Hadamard products applied to certain integral transforms”, **Complex Variables: Theory and Appl.**, 32 (3), 263-287.

[81] Ponnusamy S. and Rønning F. (1998), ”Starlikeness properties for convolutions involving hypergeometric series”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska**, L II.1, 16, 141-155.

[82] Ponnusamy S., Sairam Kaliraj A. and Starkov V. V. (2016), ”Absolutely convex, uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings”, **Complex Variables and Elliptic Equations**, 61 (10), pp. 1418-1433.

[83] Porwal S. and Darus M. (2013), ”On a new subclass of bi-univalent functions”, **J. Egyptian Math. Soc.**, 21, pp. 190-193.

[84] Ravichandran V., Polatoglu Y., Bolcal M. and Sen A. (2005), ”Certain subclasses of starlike and convex functions of complex order”, **Hacet. J. Math. Stat.**, 34, pp. 9-15.

[85] Robertson M. S. (1936), ”On the theory of univalent functions”, **Ann. Math.**, 37, pp. 374-408.

[86] Rønning F. (1994), ”On uniform starlikeness and related properties of univalent functions”, **Comp. Var. Theory Appl.**, 24 (3-4), pp. 233-239.

[87] Rønning F. (1993), ”A survey on uniformly convex and uniformly starlike functions”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska**, Sect. A, 47 (13), pp. 123-134.

[88] Rønning F. (1993), ”Uniformly Convex Functions and a Corresponding Class of Starlike Functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 118 (1), pp. 189-196.

[89] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2001), ”Goodman-Rønning-type harmonic univalent functions”, **Kyungpook Math. J.**, 41 (1), 45-54.

[90] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2002), ”Goodman-type harmonic convex functions”, **J. Natur. Geom.**, 21 (1-2), 39-50.

[91] Ruscheweyh St. and Salinas L. (1989), ”On the preservation of direction-convexity and the Goodman-Saff conjecture”, **Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math.**, 14, pp. 63-73.

[92] Ruscheweyh St. and Sheil-Small T. (1973), ”Hadamard products of Schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture”, **Comment. Math. Helv.**, 48 (1), pp. 119-135.

[93] Sakaguchi K. (1959), ”On a certain univalent mapping”, **J. Math. Soc. Japan**, 11 (1), 72-75.

[94] Shanmugam T. N. and Lourthu M. J. (2013), ”Universally Prestarlike Functions of Complex Order”, **Int. Journal of Math. Analysis**, 7 (24), pp. 1155-1164.

[95] Sheil-Small T. (1990), "Constants for Planar Harmonic Mappings", **J. London Math. Soc.**, 2 (42), pp. 237-248.

[96] Silverman H. (1998), "Harmonic Univalent Functions with Negative Coefficients", **J. Math. Ana. Appl.**, 220 (1), 283-289.

[97] Silverman H. (1975), "Univalent functions with Negative Coefficients", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 51, pp. 109-116.

[98] Sim Y. J. and Kwon O. S. (2013), "On Certain Classes of Convex Functions", **Int. J. Math. & Math. Sci.**, Article ID 294378.

[99] Sobczak-Kneć M., Starkov V. V. and Szynal J. (2011), "Old and new order of linear invariant family of harmonic mappings and the bound for Jacobian", **Ann. Univ. Mariae Curie - Skodowska**, **LXV** (2), 191-20.

[100] Spacek L. (1933), "Prispěvek k teorii funkei prostych", **Čapopis Pest. Mat. Fys.**, 62, pp. 12-19.

[101] Srivastava H. M. and Bansal D. (2015), "Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions", **J. Egyptian Math. Soc.**, 23, pp. 242-246.

[102] Srivastava H. M., Bulut S., Ça□lar M. and Ya□mur N. (2013), "Coefficient estimates for a general subclass of analytic and bi-univalent functions", **Filomat**, 27 (5), pp. 831-842.

[103] Srivastava H. M., Eker S. Sumer and Ali M. Rosihan (2015), "Coefficient bounds for a certain class of analytic and bi-univalent functions", **Filomat 29:8**, pp. 1839-1845.

[104] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2015), "Coefficient estimates for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions", **Acta Univ. Apulensis Math. Inform.**, 23, pp. 153-164.

[105] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), "Initial coefficient estimates for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions", **Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.**, 36, pp. 863-871.

[106] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), "Coefficient estimates for some general subclasses of analytic and bi-univalent functions", **Afr. Mat.**, 28, pp. 693-706.

[107] Srivastava H. M., Joshi B. S., Joshi S. and Pawar H. (2016), "Coefficient estimates for certain subclasses of meromorphically bi-univalent functions", **Palest. J. Math.**, 5, Special Issue, pp. 250-258.

[108] Srivastava H. M., Mishra A. K. and Gochhayat P. (2010), ”Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions”, **Appl. Math. Lett**, 23 (10), pp. 1188-1192.

[109] Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Sivakumar R. (2014), ”Initial coefficient bounds for a subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **Tbilisi Math. J.**, 7, pp. 1-10.

[110] Stankiewicz J. (1966), ”Quelques problémes extrémaux dans les classes des fonctions α-angulairement étoilées”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska**, Sect. A, 20, pp. 59-75.

[111] Starkov V. V. (2004), ”Application of the linear invariance idea in the theory of harmonic mappings”, New order (in Russian), **Modern Problems of Function Theory and its Applications**, Saratov State University, Saratov, 173.

[112] Sugawa Toshiyuki and Wang li-Mei (2016), ”Notes on Convex Functions of Order alpha”, **Comput. Methods Funct. Theory**, 16 (1), pp. 79-92.

[113] Tang Huo, Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Gurusamy P. (2016), ”The Fekete-Szegö functional problems for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **J. Math. Inequal.**, 10, pp. 1063-1092.

[114] Temme N. M. (1996), ”Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics”, New York: Wiley.

[115] Umezawa T. (1955), ”On the theory of univalent functions”, **Tohoku Math. J.**, 7 (2)(3), pp. 212-228 .

[116] Wilken D. R. and Feng J. (1980), ”A Remark on Convex and Starlike Functions”, **J. London Math. Soc.**, 2 (21), pp. 287-290.

[117] Xu Q.- H., Gui Y.- C. and Srivastava H. M. (2012), ”Coefficient estimates for a Certain subclass of analytic and bi-univalent functions”, **Appl. Math. Lett.**, 25, pp. 990-994.

[118] Xu Q.- H., Xiao H. -G. and Srivastava H. M. (2012), ”A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems”, **Appl. Math. Comput.**, 218 (23), pp. 11461-11465.

[119] Yalçin S., Öztürk M. and Yamankaradeniz M. (2007), ”On the subclass of Salagean-type harmonic univalent functions”, **JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 8 (2). Article 54.

[120] Zireh A. and Analouei Audegani E. (2016), ”Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions”, **Bull. Iranian Math. Soc.**, 42, pp. 881-889.